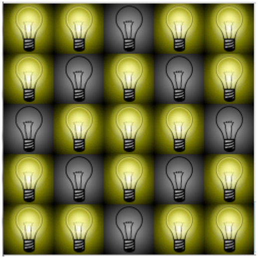
Le *Lights Out*: un petit jeu mathématique

Florent Dewez, Valentin Montmirail

MATh.en.JEANS s'invite à l'Université !



Qu'allons-nous faire ?

Nous venons de voir qu'il n'est pas facile de résoudre le jeu du *Lights Out*. De plus, le programme informatique présenté ne semble pas très performant non plus...

Dans cet exposé, nous allons voir que

Qu'allons-nous faire ?

Nous venons de voir qu'il n'est pas facile de résoudre le jeu du *Lights Out*. De plus, le programme informatique présenté ne semble pas très performant non plus...

Dans cet exposé, nous allons voir que

- chaque règle du jeu correspond à une notion mathématique ;

Qu'allons-nous faire ?

Nous venons de voir qu'il n'est pas facile de résoudre le jeu du *Lights Out*. De plus, le programme informatique présenté ne semble pas très performant non plus...

Dans cet exposé, nous allons voir que

- chaque règle du jeu correspond à une notion mathématique ;
- résoudre le jeu du *Lights Out* revient à résoudre un problème mathématique ;

Qu'allons-nous faire ?

Nous venons de voir qu'il n'est pas facile de résoudre le jeu du *Lights Out*. De plus, le programme informatique présenté ne semble pas très performant non plus...

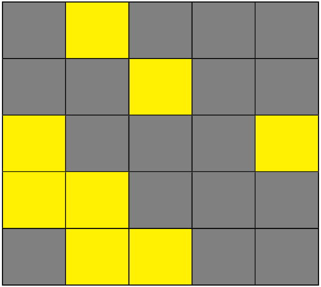
Dans cet exposé, nous allons voir que

- chaque règle du jeu correspond à une notion mathématique ;
- résoudre le jeu du *Lights Out* revient à résoudre un problème mathématique ;
- un meilleur programme informatique peut être construit grâce aux mathématiques.

Mais avant tout... Une petite simplification !

Nous allons éviter des calculs trop compliqués !

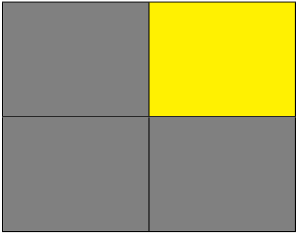
Pour cela, nous n'étudierons pas le jeu à 5×5 interrupteurs



Mais avant tout... Une petite simplification !

Nous allons éviter des calculs trop compliqués !

mais plutôt une version réduite du jeu à 2×2 interrupteurs



Cependant les raisonnements sont parfaitement identiques !

Une addition un peu particulière...

Nous allons avoir besoin d'une nouvelle addition sur les nombres 0 et 1 :

Une addition un peu particulière...

Nous allons avoir besoin d'une nouvelle addition sur les nombres 0 et 1 :

$$0 + 0 = \qquad\qquad 1 + 0 =$$

$$0 + 1 = \qquad\qquad 1 + 1 =$$

Nous allons avoir besoin d'une nouvelle addition sur les nombres 0 et 1 :

$$0 + 0 = 0 \qquad 1 + 0 =$$

$$0 + 1 = \qquad 1 + 1 =$$

Une addition un peu particulière...

Nous allons avoir besoin d'une nouvelle addition sur les nombres 0 et 1 :

$$0 + 0 = 0 \qquad 1 + 0 = 1$$

$$0 + 1 = \qquad 1 + 1 =$$

Une addition un peu particulière...

Nous allons avoir besoin d'une nouvelle addition sur les nombres 0 et 1 :

$$0 + 0 = 0 \qquad 1 + 0 = 1$$

$$0 + 1 = 1 \qquad 1 + 1 =$$

Une addition un peu particulière...

Nous allons avoir besoin d'une nouvelle addition sur les nombres 0 et 1 :

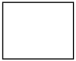
$$0+0 = 0 \qquad 1+0 = 1$$

$$0+1 = 1 \qquad 1+1 = 0$$

Une première modélisation pas très difficile !

On rappelle

- qu'un interrupteur est *éteint* si



- qu'un interrupteur est *allumé* si

Une première modélisation pas très difficile !

On rappelle

- qu'un interrupteur est *éteint* si

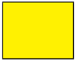
- qu'un interrupteur est *allumé* si

Une première modélisation pas très difficile !

On rappelle

- qu'un interrupteur est *éteint* si

- qu'un interrupteur est *allumé* si

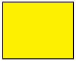


Une première modélisation pas très difficile !

On rappelle

- qu'un interrupteur est *éteint* si

- qu'un interrupteur est *allumé* si



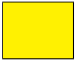
Modélisons ces deux états, c'est-à-dire relions-les à des objets mathématiques:

Une première modélisation pas très difficile !

On rappelle

- qu'un interrupteur est *éteint* si

- qu'un interrupteur est *allumé* si



Modélisons ces deux états, c'est-à-dire relions-les à des objets mathématiques:

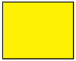
- Si un interrupteur est *éteint*, alors on lui associe le nombre ;
- Si un interrupteur est *allumé*, alors on lui associe le nombre .

Une première modélisation pas très difficile !

On rappelle

- qu'un interrupteur est *éteint* si

- qu'un interrupteur est *allumé* si



Modélisons ces deux états, c'est-à-dire relions-les à des objets mathématiques:

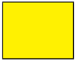
- Si un interrupteur est *éteint*, alors on lui associe le nombre 0 ;
- Si un interrupteur est *allumé*, alors on lui associe le nombre .

Une première modélisation pas très difficile !

On rappelle

- qu'un interrupteur est *éteint* si

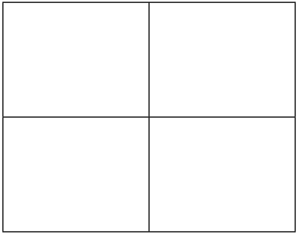
- qu'un interrupteur est *allumé* si



Modélisons ces deux états, c'est-à-dire relions-les à des objets mathématiques:

- Si un interrupteur est *éteint*, alors on lui associe le nombre 0 ;
- Si un interrupteur est *allumé*, alors on lui associe le nombre 1 .

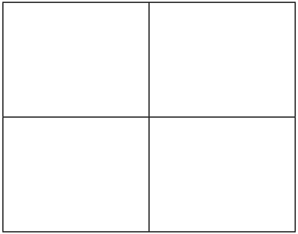
Maintenant nous modélisons la grille d'interrupteurs.



Une deuxième modélisation toujours pas très difficile !

Maintenant nous modélisons la grille d'interrupteurs.

Nous allons lui associer une colonne à 4 lignes.

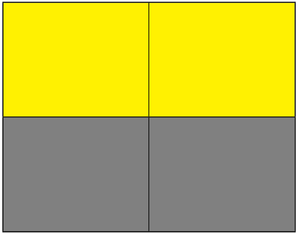


$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

Une deuxième modélisation toujours pas très difficile !

Maintenant nous modélisons la grille d'interrupteurs.

Nous allons lui associer une colonne à 4 lignes.

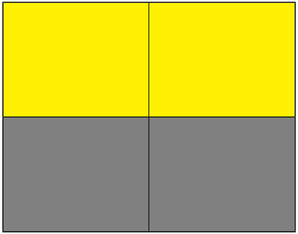


$$\longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

Une deuxième modélisation toujours pas très difficile !

Maintenant nous modélisons la grille d'interrupteurs.

Nous allons lui associer une colonne à 4 lignes.

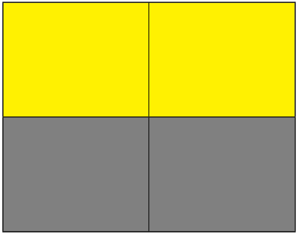


$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

Une deuxième modélisation toujours pas très difficile !

Maintenant nous modélisons la grille d'interrupteurs.

Nous allons lui associer une colonne à 4 lignes.

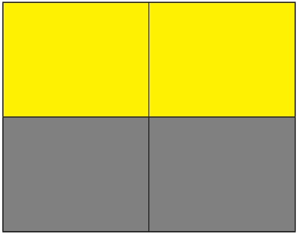


$$\longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \overset{\color{red}1}{\dots} \\ \overset{\color{red}1}{\dots} \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

Une deuxième modélisation toujours pas très difficile !

Maintenant nous modélisons la grille d'interrupteurs.

Nous allons lui associer une colonne à 4 lignes.

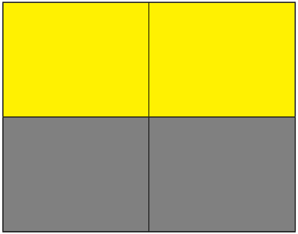


$$\longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \underset{\dots}{1} \\ \underset{\dots}{1} \\ \underset{\dots}{0} \\ \dots \end{pmatrix}$$

Une deuxième modélisation toujours pas très difficile !

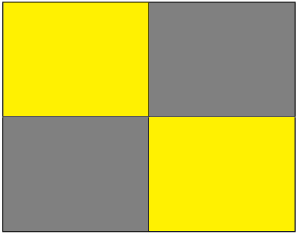
Maintenant nous modélisons la grille d'interrupteurs.

Nous allons lui associer une colonne à 4 lignes.



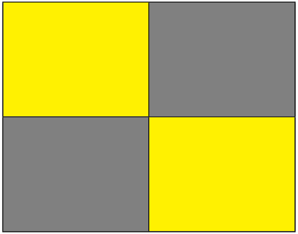
$$\longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quelques exemples pour la forme



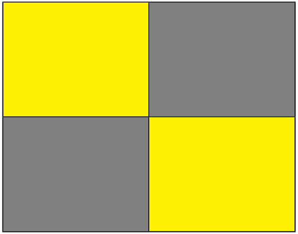
$$\longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

Quelques exemples pour la forme



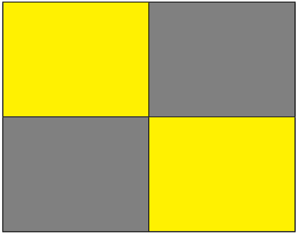
$$\longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \overset{\color{red}{1}}{\dots} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

Quelques exemples pour la forme



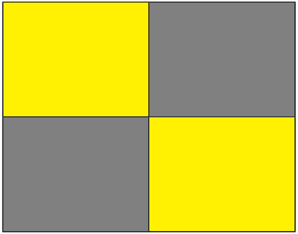
$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} {\color{red}1} \\ \dots \\ {\color{red}0} \\ \dots \\ \\ \dots \\ \\ \dots \end{pmatrix}$$

Quelques exemples pour la forme



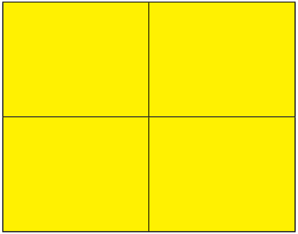
$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} \color{red}{1} \\ \dots \\ \color{red}{0} \\ \dots \\ \color{red}{0} \\ \dots \\ \\ \dots \end{pmatrix}$$

Quelques exemples pour la forme



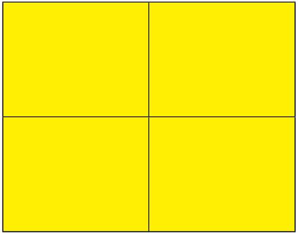
$$\longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \color{red}{1} \\ \cdots \\ \color{red}{0} \\ \cdots \\ \color{red}{0} \\ \cdots \\ \color{red}{1} \\ \cdots \end{pmatrix}$$

Quelques exemples pour la forme



$$\longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

Quelques exemples pour la forme



$$\longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \color{red}{1} \\ \ldots \\ \color{red}{1} \\ \ldots \\ \color{red}{1} \\ \ldots \\ \color{red}{1} \\ \ldots \end{pmatrix}$$

Une troisième (et dernière) modélisation un peu plus compliquée...

Le fait d'appuyer sur un interrupteur sera appelé une action.

Une troisième (et dernière) modélisation un peu plus compliquée...

Le fait d'appuyer sur un interrupteur sera appelé une action.

Puisqu'il y a 4 interrupteurs, nous avons donc   actions différentes, que nous allons noter comme suit:

Une troisième (et dernière) modélisation un peu plus compliquée...

Le fait d'appuyer sur un interrupteur sera appelé une action.

Puisqu'il y a 4 interrupteurs, nous avons donc 4 actions différentes, que nous allons noter comme suit:

Une troisième (et dernière) modélisation un peu plus compliquée...

Le fait d'appuyer sur un interrupteur sera appelé une action.

Puisqu'il y a 4 interrupteurs, nous avons donc 4 actions différentes, que nous allons noter comme suit:

- $+A_1$: "Appuyer sur l'interrupteur 1 " ;

Une troisième (et dernière) modélisation un peu plus compliquée...

Le fait d'appuyer sur un interrupteur sera appelé une action.

Puisqu'il y a 4 interrupteurs, nous avons donc 4 actions différentes, que nous allons noter comme suit:

- $+A_1$: "Appuyer sur l'interrupteur 1 " ;
- $+A_2$: "Appuyer sur l'interrupteur 2 " ;

Une troisième (et dernière) modélisation un peu plus compliquée...

Le fait d'appuyer sur un interrupteur sera appelé une action.

Puisqu'il y a 4 interrupteurs, nous avons donc 4 actions différentes, que nous allons noter comme suit:

- $+A_1$: "Appuyer sur l'interrupteur 1 " ;
- $+A_2$: "Appuyer sur l'interrupteur 2 " ;
- $+A_3$: "Appuyer sur l'interrupteur 3 " ;

Une troisième (et dernière) modélisation un peu plus compliquée...

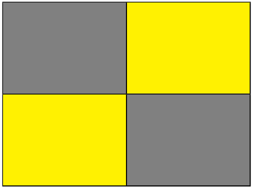
Le fait d'appuyer sur un interrupteur sera appelé une action.

Puisqu'il y a 4 interrupteurs, nous avons donc 4 actions différentes, que nous allons noter comme suit:

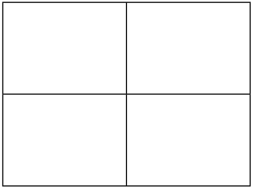
- $+A_1$: "Appuyer sur l'interrupteur 1 " ;
- $+A_2$: "Appuyer sur l'interrupteur 2 " ;
- $+A_3$: "Appuyer sur l'interrupteur 3 " ;
- $+A_4$: "Appuyer sur l'interrupteur 4 " .

Quand on appuie sur l'interrupteur 1...

Regardons l'action $+A_1$ sur un exemple:

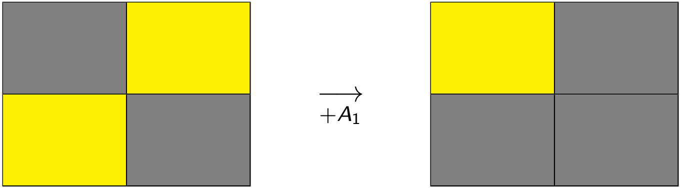


$$\xrightarrow[+A_1]{}$$



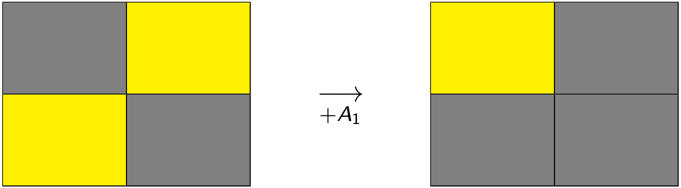
Quand on appuie sur l'interrupteur 1...

Regardons l'action $+A_1$ sur un exemple:



Quand on appuie sur l'interrupteur 1...

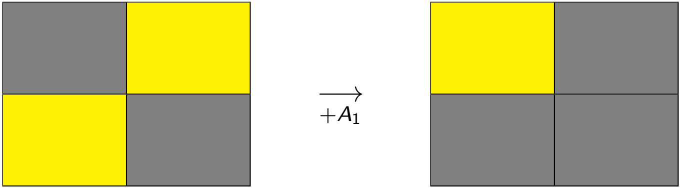
Qu'en est-il des colonnes associées à ces deux grilles ?



$$\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

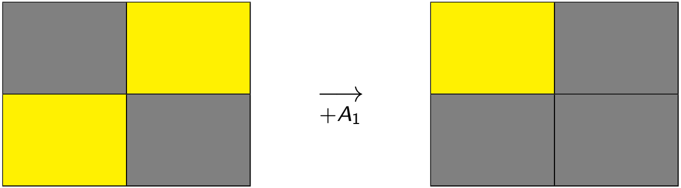
Quand on appuie sur l'interrupteur 1...

Qu'en est-il des colonnes associées à ces deux grilles ?



$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

Qu'en est-il des colonnes associées à ces deux grilles ?



$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

... quel calcul faisons-nous ?

La question essentielle que l'on se pose ici est:

... quel calcul faisons-nous ?

La question essentielle que l'on se pose ici est:

Mathématiquement, comment sommes-nous passés de la première à la deuxième colonne ?

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

... quel calcul faisons-nous ?

La question essentielle que l'on se pose ici est:

Mathématiquement, comment sommes-nous passés de la première à la deuxième colonne ?

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On peut remarquer que l'on a fait 4 additions:

$$\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

La question essentielle que l'on se pose ici est:

Mathématiquement, comment sommes-nous passés de la première à la deuxième colonne ?

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On peut remarquer que l'on a fait 4 additions:

$$\begin{cases} 0 + \ldots = 1 \\ \\ \\ \end{cases}$$

La question essentielle que l'on se pose ici est:

Mathématiquement, comment sommes-nous passés de la première à la deuxième colonne ?

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On peut remarquer que l'on a fait 4 additions:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 + 1 = 1 \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

... quel calcul faisons-nous ?

La question essentielle que l'on se pose ici est:

Mathématiquement, comment sommes-nous passés de la première à la deuxième colonne ?

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On peut remarquer que l'on a fait 4 additions:

$$\begin{cases} 0 + 1 = 1 \\ \\ 0 + \ldots = 0 \end{cases}$$

La question essentielle que l'on se pose ici est:

Mathématiquement, comment sommes-nous passés de la première à la deuxième colonne ?

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On peut remarquer que l'on a fait 4 additions:

$$\begin{cases} 0 + 1 = 1 \\ \\ \\ 0 + 0 = 0 \end{cases}$$

... quel calcul faisons-nous ?

La question essentielle que l'on se pose ici est:

Mathématiquement, comment sommes-nous passés de la première à la deuxième colonne ?

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On peut remarquer que l'on a fait 4 additions:

$$\begin{cases} 0 + 1 = 1 \\ 1 + \ldots = 0 \\ \\ 0 + 0 = 0 \end{cases}$$

... quel calcul faisons-nous ?

La question essentielle que l'on se pose ici est:

Mathématiquement, comment sommes-nous passés de la première à la deuxième colonne ?

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On peut remarquer que l'on a fait 4 additions:

$$\begin{cases} 0 + 1 = 1 \\ 1 + 1 = 0 \\ \\ 0 + 0 = 0 \end{cases}$$

... quel calcul faisons-nous ?

La question essentielle que l'on se pose ici est:

Mathématiquement, comment sommes-nous passés de la première à la deuxième colonne ?

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On peut remarquer que l'on a fait 4 additions:

$$\begin{cases} 0 + 1 = 1 \\ 1 + 1 = 0 \\ 1 + \ldots = 0 \\ 0 + 0 = 0 \end{cases}$$

La question essentielle que l'on se pose ici est:

Mathématiquement, comment sommes-nous passés de la première à la deuxième colonne ?

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On peut remarquer que l'on a fait 4 additions:

$$\begin{cases} 0 + 1 = 1 \\ 1 + 1 = 0 \\ 1 + 1 = 0 \\ 0 + 0 = 0 \end{cases}$$

... quel calcul faisons-nous ?

La question essentielle que l'on se pose ici est:

Mathématiquement, comment sommes-nous passés de la première à la deuxième colonne ?

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a donc additionné deux colonnes ligne par ligne :

$$\begin{cases} 0 + 1 = 1 \\ 1 + 1 = 0 \\ 1 + 1 = 0 \\ 0 + 0 = 0 \end{cases}$$

La question essentielle que l'on se pose ici est:

Mathématiquement, comment sommes-nous passés de la première à la deuxième colonne ?

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a donc additionné deux colonnes ligne par ligne :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \color{red}{1} \\ \color{red}{1} \\ \color{red}{1} \\ \color{red}{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Conclusion

On peut montrer que le fait d'appuyer sur l'interrupteur 1 correspond mathématiquement à

Conclusion

On peut montrer que le fait d'appuyer sur l'interrupteur 1 correspond mathématiquement à

$$+A_1 = + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Et pour $+A_2$, $+A_3$ et $+A_4$?

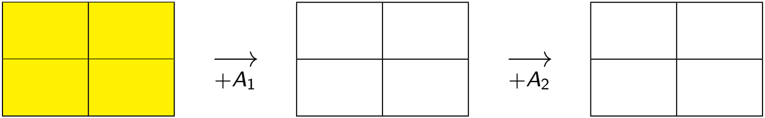
De la même manière, on trouve

$$+A_1 = +\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad +A_2 = +\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$+A_3 = +\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad +A_4 = +\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Et quand on appuie sur plusieurs interrupteurs ?

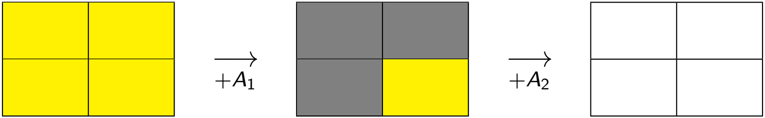
Par exemple, si on appuie sur l'interrupteur 1 et puis sur l'interrupteur 2, alors...



$$\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

Et quand on appuie sur plusieurs interrupteurs ?

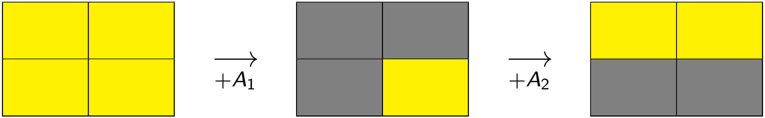
Par exemple, si on appuie sur l'interrupteur 1 et puis sur l'interrupteur 2, alors...



$$\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

Et quand on appuie sur plusieurs interrupteurs ?

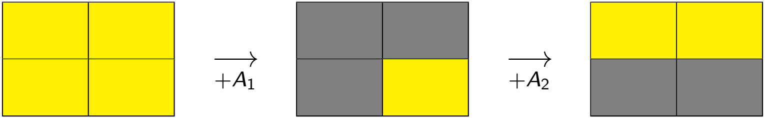
Par exemple, si on appuie sur l'interrupteur 1 et puis sur l'interrupteur 2, alors...



$$\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

Et quand on appuie sur plusieurs interrupteurs ?

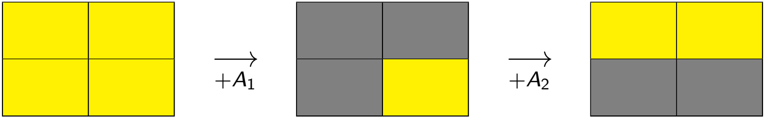
Par exemple, si on appuie sur l'interrupteur 1 et puis sur l'interrupteur 2, alors...



$$\begin{pmatrix} \color{red}{1} \\ \color{red}{1} \\ \color{red}{1} \\ \color{red}{1} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

Et quand on appuie sur plusieurs interrupteurs ?

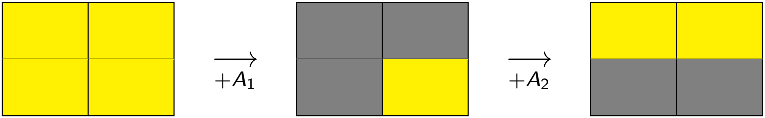
Par exemple, si on appuie sur l'interrupteur 1 et puis sur l'interrupteur 2, alors...



$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

Et quand on appuie sur plusieurs interrupteurs ?

Par exemple, si on appuie sur l'interrupteur 1 et puis sur l'interrupteur 2, alors...



$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Et quand on appuie sur plusieurs interrupteurs ?

Qu'avons-nous fait mathématiquement ?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons fait les opérations suivantes:

Et quand on appuie sur plusieurs interrupteurs ?

Qu'avons-nous fait mathématiquement ?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons fait les opérations suivantes:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Et quand on appuie sur plusieurs interrupteurs ?

Qu'avons-nous fait mathématiquement ?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons fait les opérations suivantes:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + A_1$$

Et quand on appuie sur plusieurs interrupteurs ?

Qu'avons-nous fait mathématiquement ?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons fait les opérations suivantes:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + A_1 + A_2$$

Et quand on appuie sur plusieurs interrupteurs ?

Qu'avons-nous fait mathématiquement ?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons fait les opérations suivantes:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + A_2$$

Et quand on appuie sur plusieurs interrupteurs ?

Qu'avons-nous fait mathématiquement ?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons fait les opérations suivantes:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Et quand on appuie sur plusieurs interrupteurs ?

Qu'avons-nous fait mathématiquement ?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons fait les opérations suivantes:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

Et quand on appuie sur plusieurs interrupteurs ?

Qu'avons-nous fait mathématiquement ?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons fait les opérations suivantes:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

Et quand on appuie sur plusieurs interrupteurs ?

Qu'avons-nous fait mathématiquement ?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons fait les opérations suivantes:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

Et quand on appuie sur plusieurs interrupteurs ?

Qu'avons-nous fait mathématiquement ?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons fait les opérations suivantes:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix}$$

Et quand on appuie sur plusieurs interrupteurs ?

Qu'avons-nous fait mathématiquement ?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons fait les opérations suivantes:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Conclusion

On peut montrer que le fait d'appuyer sur l'interrupteur 1 puis sur l'interrupteur 2 correspond mathématiquement à

Conclusion

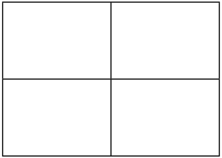
On peut montrer que le fait d'appuyer sur l'interrupteur 1 puis sur l'interrupteur 2 correspond mathématiquement à

$$+A_1 + A_2 = + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

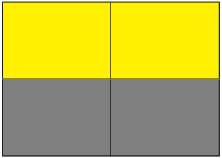
Alors comment résout-on le Lights Out ?

Alors comment résout-on le Lights Out ?

On se donne une grille de départ avec des interrupteurs éteints et allumés.

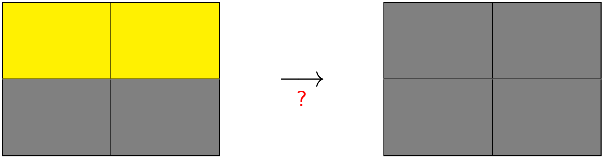


On se donne une grille de départ avec des interrupteurs éteints et allumés.



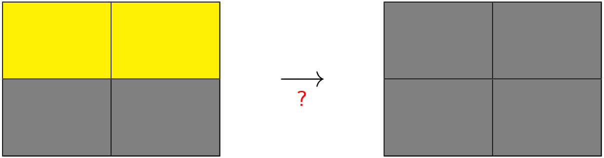
Alors comment résout-on le Lights Out ?

On se donne une grille de départ avec des interrupteurs éteints et allumés. On cherche alors une combinaison d'interrupteurs sur lesquels appuyer pour éteindre tous les interrupteurs !



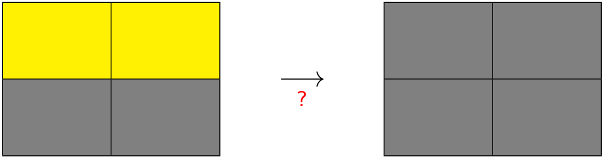
Alors comment résout-on le Lights Out ?

On se donne une grille de départ avec des interrupteurs éteints et allumés. On cherche alors une combinaison d'interrupteurs sur lesquels appuyer pour éteindre tous les interrupteurs !



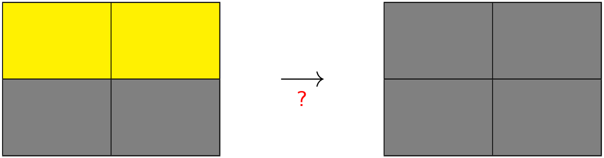
Donc pour trouver cette combinaison, nous cherchons combien de fois nous devons appuyer sur l'interrupteur 1, l'interrupteur 2, l'interrupteur 3 et l'interrupteur 4 !

Alors comment résout-on le Lights Out ?



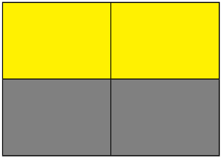
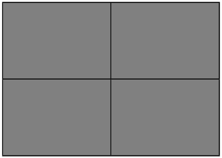
$$\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

Alors comment résout-on le Lights Out ?



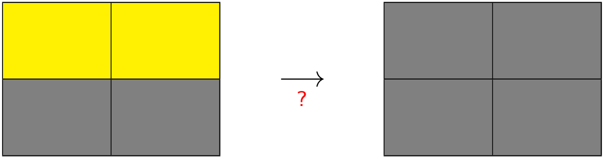
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{pmatrix}$$

Alors comment résout-on le Lights Out ?

 $\xrightarrow[?]{}$ 

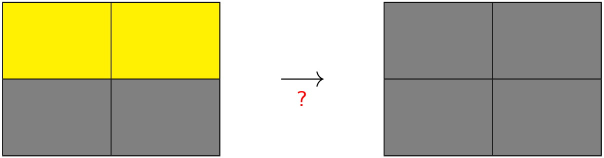
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alors comment résout-on le Lights Out ?



$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mathématiquement on se demande



$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mathématiquement on se demande combien de fois nous devons faire les additions $+A_1$, $+A_2$, $+A_3$ et $+A_4$ pour passer de la première à la deuxième colonne.

Que devons-nous faire mathématiquement ?

Mathématiquement, on va faire les opérations suivantes:

Que devons-nous faire mathématiquement ?

Mathématiquement, on va faire les opérations suivantes:

$$\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

Que devons-nous faire mathématiquement ?

Mathématiquement, on va faire les opérations suivantes:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que devons-nous faire mathématiquement ?

Mathématiquement, on va faire les opérations suivantes:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + {\color{red}?}\, A_1$$

Que devons-nous faire mathématiquement ?

Mathématiquement, on va faire les opérations suivantes:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \color{red}{?}\color{black}\, A_1 + \color{blue}{?}\color{black}\, A_2$$

Que devons-nous faire mathématiquement ?

Mathématiquement, on va faire les opérations suivantes:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + {\color{red}?}\, A_1 + {\color{blue}?}\, A_2 + {\color{green}?}\, A_3$$

Que devons-nous faire mathématiquement ?

Mathématiquement, on va faire les opérations suivantes:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \color{red}{?}\, A_1 + \color{blue}{?}\, A_2 + \color{green}{?}\, A_3 + \color{purple}{?}\, A_4$$

Que devons-nous faire mathématiquement ?

Mathématiquement, on va faire les opérations suivantes:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + {\color{red}?}\,A_1 + {\color{blue}?}\,A_2 + {\color{green}?}\,A_3 + {\color{purple}?}\,A_4 = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

Que devons-nous faire mathématiquement ?

Mathématiquement, on va faire les opérations suivantes:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \;?\,A_1 + \;?\,A_2 + \;?\,A_3 + \;?\,A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que devons-nous faire mathématiquement ?

Mathématiquement, on va faire les opérations suivantes:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x\,A_1 + \,?\,A_2 + \,?\,A_3 + \,?\,A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que devons-nous faire mathématiquement ?

Mathématiquement, on va faire les opérations suivantes:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + {\color{red} x}\, A_1 + {\color{blue} y}\, A_2 + {\color{green} ?}\, A_3 + {\color{purple} ?}\, A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que devons-nous faire mathématiquement ?

Mathématiquement, on va faire les opérations suivantes:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x\,A_1 + y\,A_2 + z\,A_3 + ?\,A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que devons-nous faire mathématiquement ?

Mathématiquement, on va faire les opérations suivantes:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + {\color{red}x}\,A_1 + {\color{blue}y}\,A_2 + {\color{green}z}\,A_3 + {\color{purple}t}\,A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que devons-nous faire mathématiquement ?

Mathématiquement, on va faire les opérations suivantes:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x\,A_1 + y\,A_2 + z\,A_3 + t\,A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nous devons donc trouver les nombres x, y, z et t qui satisfont l'égalité ci-dessus.

Après quelques calculs, l'égalité précédente devient

Nous devons résoudre...

Après quelques calculs, l'égalité précédente devient

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} 1 & + & x & + & y & + & z & + & 0 & = & 0 \\ 1 & + & x & + & y & + & 0 & + & t & = & 0 \\ 0 & + & x & + & 0 & + & z & + & t & = & 0 \\ 0 & + & 0 & + & y & + & z & + & t & = & 0 \end{array}\right.$$

Nous devons résoudre...

Après quelques calculs, l'égalité précédente devient

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} 1 & + & x & + & y & + & z & + & 0 & = & 0 \\ 1 & + & x & + & y & + & 0 & + & t & = & 0 \\ 0 & + & x & + & 0 & + & z & + & t & = & 0 \\ 0 & + & 0 & + & y & + & z & + & t & = & 0 \end{array}\right.$$

C'est un système linéaire à 4 équations et 4 inconnues.

Nous devons résoudre...

Après quelques calculs, l'égalité précédente devient

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} 1 & + & x & + & y & + & z & + & 0 & = & 0 \\ 1 & + & x & + & y & + & 0 & + & t & = & 0 \\ 0 & + & x & + & 0 & + & z & + & t & = & 0 \\ 0 & + & 0 & + & y & + & z & + & t & = & 0 \end{array}\right.$$

C'est un système linéaire à 4 équations et 4 inconnues.

Grâce à la méthode du Pivot de Gauss, nous pouvons calculer la solution à la main.

Et nous trouvons comme solution...

Dans notre exemple, le pivot de Gauss donne les valeurs

Et nous trouvons comme solution...

Dans notre exemple, le pivot de Gauss donne les valeurs

$$x = 0 \qquad y = 0 \qquad z = 1 \qquad t = 1$$

Et nous trouvons comme solution...

Dans notre exemple, le pivot de Gauss donne les valeurs

$$x = 0 \qquad y = 0 \qquad z = 1 \qquad t = 1$$

Donc pour éteindre la grille de départ précédente, nous devons appuyer fois sur l'interrupteur 1, fois sur l'interrupteur 2, fois sur l'interrupteur 3 et fois sur l'interrupteur 4.

Et nous trouvons comme solution...

Dans notre exemple, le pivot de Gauss donne les valeurs

$$x = 0 \qquad y = 0 \qquad z = 1 \qquad t = 1$$

Donc pour éteindre la grille de départ précédente, nous devons appuyer 0 fois sur l'interrupteur 1,   fois sur l'interrupteur 2,   fois sur l'interrupteur 3 et   fois sur l'interrupteur 4.

Et nous trouvons comme solution...

Dans notre exemple, le pivot de Gauss donne les valeurs

$$x = 0 \qquad y = 0 \qquad z = 1 \qquad t = 1$$

Donc pour éteindre la grille de départ précédente, nous devons appuyer 0 fois sur l'interrupteur 1, 0 fois sur l'interrupteur 2, fois sur l'interrupteur 3 et fois sur l'interrupteur 4.

Et nous trouvons comme solution...

Dans notre exemple, le pivot de Gauss donne les valeurs

$$x = 0 \qquad y = 0 \qquad z = 1 \qquad t = 1$$

Donc pour éteindre la grille de départ précédente, nous devons appuyer 0 fois sur l'interrupteur 1, 0 fois sur l'interrupteur 2, 1 fois sur l'interrupteur 3 et fois sur l'interrupteur 4.

Et nous trouvons comme solution...

Dans notre exemple, le pivot de Gauss donne les valeurs

$$x = 0 \qquad y = 0 \qquad z = 1 \qquad t = 1$$

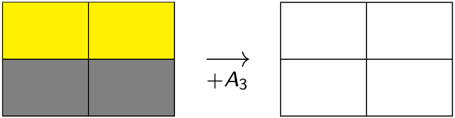
Donc pour éteindre la grille de départ précédente, nous devons appuyer 0 fois sur l'interrupteur 1, 0 fois sur l'interrupteur 2, 1 fois sur l'interrupteur 3 et 1 fois sur l'interrupteur 4.

Et nous trouvons comme solution...

Dans notre exemple, le pivot de Gauss donne les valeurs

$$x = 0 \qquad y = 0 \qquad z = 1 \qquad t = 1$$

Donc pour éteindre la grille de départ précédente, nous devons appuyer 0 fois sur l'interrupteur 1, 0 fois sur l'interrupteur 2, 1 fois sur l'interrupteur 3 et 1 fois sur l'interrupteur 4.

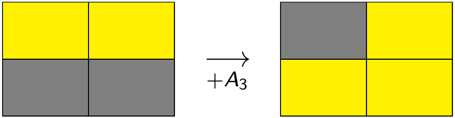


Et nous trouvons comme solution...

Dans notre exemple, le pivot de Gauss donne les valeurs

$$x = 0 \qquad y = 0 \qquad z = 1 \qquad t = 1$$

Donc pour éteindre la grille de départ précédente, nous devons appuyer 0 fois sur l'interrupteur 1, 0 fois sur l'interrupteur 2, 1 fois sur l'interrupteur 3 et 1 fois sur l'interrupteur 4.

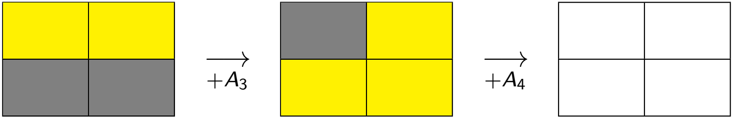


Et nous trouvons comme solution...

Dans notre exemple, le pivot de Gauss donne les valeurs

$$x = 0 \qquad y = 0 \qquad z = 1 \qquad t = 1$$

Donc pour éteindre la grille de départ précédente, nous devons appuyer 0 fois sur l'interrupteur 1, 0 fois sur l'interrupteur 2, 1 fois sur l'interrupteur 3 et 1 fois sur l'interrupteur 4.

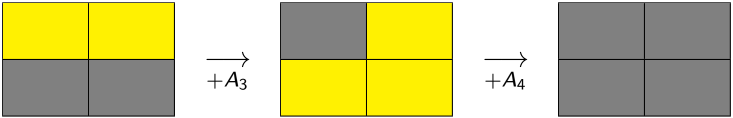


Et nous trouvons comme solution...

Dans notre exemple, le pivot de Gauss donne les valeurs

$$x = 0 \qquad y = 0 \qquad z = 1 \qquad t = 1$$

Donc pour éteindre la grille de départ précédente, nous devons appuyer 0 fois sur l'interrupteur 1, 0 fois sur l'interrupteur 2, 1 fois sur l'interrupteur 3 et 1 fois sur l'interrupteur 4.



Résumé de la démarche

Résumé de la démarche

$\boxed{\text{Problème du Lights Out}} \xrightarrow{?} \boxed{\text{Solution du Lights Out}}$

Résumé de la démarche

$$\boxed{\text{Problème du Lights Out}} \quad \xrightarrow{?} \quad \boxed{\text{Solution du Lights Out}}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\text{Problème mathématique}}$$

Résumé de la démarche

$$
\begin{array}{ccc}
\boxed{\text{Problème du Lights Out}} & \overset{?}{\longrightarrow} & \boxed{\text{Solution du Lights Out}} \\
\downarrow & & \\
\boxed{\text{Problème mathématique}} & \longrightarrow & \boxed{\text{Solution mathématique}}
\end{array}
$$

Résumé de la démarche

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\text{Problème du Lights Out}} \arrow[r, "?"] \arrow[d] & \boxed{\text{Solution du Lights Out}} \\
\boxed{\text{Problème mathématique}} \arrow[r] & \boxed{\text{Solution mathématique}} \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

Résumé de la démarche

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\text{Problème du Lights Out}} \arrow[r, "\textcolor{blue}{?}"] \arrow[d] & \boxed{\text{Solution du Lights Out}} \\
\boxed{\text{Problème mathématique}} \arrow[r, "\textcolor{red}{\text{Pivot de Gauss}}"'] & \boxed{\text{Solution mathématique}} \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

Résumé de la démarche

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\text{Problème du Lights Out}} \arrow[rr, "?"] \arrow[d] & & \boxed{\text{Solution du Lights Out}} \\
\boxed{\text{Problème mathématique}} \arrow[rr, "\text{Pivot de Gauss}"'] & {} \arrow[d, leftrightarrow] & \boxed{\text{Solution mathématique}} \arrow[u] \\
& \boxed{\text{Informatique}} &
\end{tikzcd}
$$

Résumé de la démarche

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\text{Problème du Lights Out}} \arrow[rr, "?"] \arrow[d] & & \boxed{\text{Solution du Lights Out}} \\
\boxed{\text{Problème mathématique}} \arrow[rr, "\text{Pivot de Gauss}"'] & {} \arrow[d, leftrightarrow] & \boxed{\text{Solution mathématique}} \arrow[u] \\
& \boxed{\text{Informatique}} &
\end{tikzcd}
$$

<u>Conséquence:</u> Construction d'un nouveau programme informatique, basé sur les mathématiques, pour résoudre le Lights Out !

Merci !